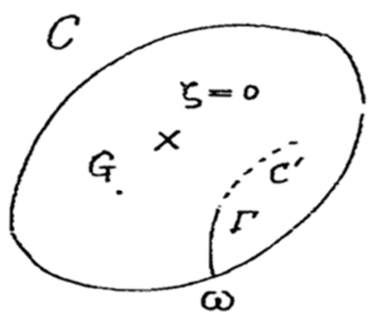
625. Schlitz ニヨル Verzerrung ニ就イテ

早田 文一

$\zeta=0$ ヲフクム単一ナ Jordan 曲線ニヨリカコマレル schlicht ナ領域ヲ G トスル。



G ヲ z 平面ノ単位円ニ寫像スル函数ヲ $\zeta=f(z)$ トスル。但シ $f(0)=0$

又 C 上ノ一点 ω ヨリ G ニ Schlitz Γ ヲ入レル。Γ ハ $\zeta=0$ ヲ通過シナイモノトスル。コノ領域ヲ G_Γ、寫像函数ヲ $\zeta=f_\Gamma(z)$ トスル。$(f_\Gamma(0)=0)$ シカルトキハ次ノ事実ガ成立スル。

$$|f'(0)|>|f'_\Gamma(0)|$$

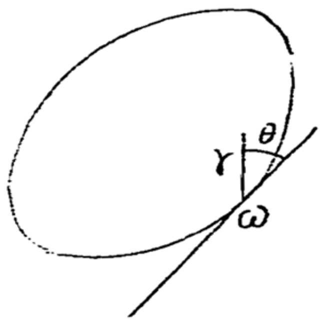
コレハ Minimumprinzip ヨリ容易ニ証明セラレル.（第138号, 613）

今 ω ヨリ G ノ内部ニ Jordankurve C' ヲ $\zeta=0$ ヲ通過シナイヨウニ引ク。ω ヨリ C' 上ニ測ッタ長サ S ナル Schlitz Γ ヲ入レ. コノ領域ヲ G_S トシ寫像函数ヲ $\zeta=f_S(z)$ トスレバ $(f_S(0)=0)$ 上ノ結果ヨリ $|f'_S(0)|$ ハ S ノ monoton abnehmende Funktion デアルコトガワカル。

次ニ ω ヨリ長サ無限小ノ Schlitz γ ヲ入レルトキ内部ノ Abbildungsmodul ガ γ ノ方向ニヨリ如何ニ変化スルカヲ考察スル。

ω ヲ analytische Jordanbogen C上ノ regulär ナ点トシ，ω ニ於ケル切線ト γ トノナス角ヲ θ トスル。

$|f'_\gamma(0)|$ ガ γ ノ長サガ一定ナルトキ θ ノ如何ナル値ニ對シテ最小トナルカヲ問題ニスル。γ ノ長サヲ入トシ，入ハGノ「デメンション」ニ比較シテ極メテ小サイト假定スル。



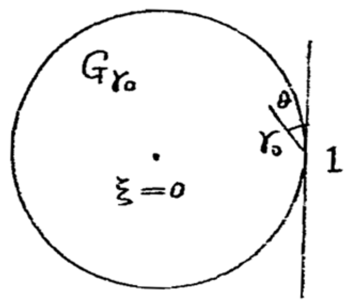
Gヲ ξ 平面ノ単位円ニ寫像スル函数ヲ $\zeta=g(\xi)$，$(g(0)=0)$ トスレバ G_γ ハ $\zeta=g(\xi)$ ニヨリ ξ 平面ノ単位円ニ Schlitz γ_0 ガ入ッタ領域ニ寫像セラレル。γ_0 ハ単位円周上ノ一点ニ於イテ Tangent ト θ ナル角ヲナス無限小ノ Strecke デアル。コノ領域ヲ z 平面ノ単位円ニ寫像スル函数ヲ $\xi=h_{\gamma_0}(z)$，$(h_\gamma(0)=0)$ トスル。シカルトキハ $f_\gamma(z)=g(h_{\gamma_0}(z))$ デアルカラ

$$\left|\frac{df_\gamma(z)}{dz}\right|_{z=0}=\left|\frac{dg(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=0}\left|\frac{dh_{\gamma_0}(z)}{dz}\right|_{z=0}$$

$$=|g'(0)||h'_{\gamma_0}(0)|$$

$|g'(0)|$ ハ Schlitz γ ニハ無関係ナ因数デアルカラ、以下ニ於テハ專ラ $|h'_{\gamma_0}(0)|$ ヲ考察スル。

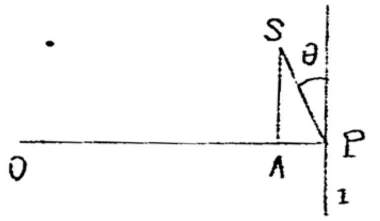
ξ 平面ノ単位円ニ $\xi=1$ ヨリ長サ入ナル線分ノ Schlitz γ_0 ヲ入レル。入ハ 1（単位円ノ半径）ニ比較シテ極メテ小サイ数トスル。且ツ γ_0 ハ $\xi=1$ ニ於ケル切線ト角 θ ヲナス。コノ領域ヲ z 平面ノ単位円ニ寫像スル函数ヲ $z=\varphi_{\gamma_0}(\xi)$



（$\varphi_{\gamma_0}(0)=0$）トスル。コレハ $\xi = h_{\gamma_0}(z)$ ノ逆函数デアル。

$$\Psi(\xi) = \log\left|\frac{\varphi_{\gamma_0}(\xi)}{\xi}\right|$$

ト置ケバ $\Psi(0) = \log|\varphi'_{\gamma_0}(0)|$ デアル。



$\Psi(\xi)$ ハ G_{γ_0} ノ Rand $|\xi|=1$ ニ於イテ 0 デアル。又 Rand γ_0 ノ上デハ

$$(1) \quad \Psi(\xi) = -\log|\xi|$$

トコロガ γ_0 ノ長サハ単位円ノ「デメンション」ニ比較シテ小サイノデアルカラ γ_0 上デ $\xi=1$ ヨリノ距離 s ナル点ニ於ケル $\Psi(\xi)$ ノ値ハ s ヨリ Radius $(0,1)$ ニ下シタ垂線ノ足 A ニ於ケル $-\log|\xi|$ ノ値ニ等シイ。

$AP = s\sin\theta$ デアルカラ

$$(2) \quad \Psi(\xi) = -\log OA = -\log(1 - s\sin\theta) \quad (s \ll 1)$$
$$= s\sin\theta$$

故ニ $\Psi(\xi)$ ハ $|\xi|=1$ ニ於テ 0 トナリ γ_0 ノ上デハ 1 ヨリノ距離ガ s ナル点ニ於テ $s\sin\theta$ ナル値ヲトル。シカシテ G_{γ_0} 内部ニ於テ、至ルトコロ正則ナル調和函数デアル。今 $\Psi(\xi)$ ノ θ ニ對スル abhängigkeit ヲ考ヘルノデアルカラ $\Psi_\theta(\xi)$ ト書クコトニスレバ

公式ニヨリ（Nevanlinna; Eindeutige analytische Funktionen 27 頁参照）

$$\Psi_\theta(\xi)=2\int_{s=0}^{\lambda} s\sin\theta\cdot d\omega(\xi;s,\theta)$$

Schlitz γ_0 ハニツノ側（*Ufer*）ヲ有スルカラ因数2ヲ要スル。$\omega(\xi;s,\theta)$ ハ 1 ヨリノ長サ s ナル γ_0 ノ一部分ノ G_{γ_0} ニ関スル *harmonisches Mass* デアル。（G_{γ_0}, $|\xi|=1$ ナル *Rand* ハソノ上ノ *Randwert* ガ 0 デアルカラ上ノ *Darstellung* ニ *explizit* ニ入ッテコナイ。）

故ニ

$$\Psi_\theta(0)=2\int_{s=0}^{\lambda} s\sin\theta\cdot d\omega(0;s,\theta)$$

コヽニ於テ次ノ差ヲ作ツテ見ル。

$$(3)\quad \Psi_{\frac{\pi}{2}}(0)-\Psi_\theta(0)=2\int_{s=0}^{\lambda} s(1-\sin\theta)\,d\omega(0;s,\theta)$$

$$+2\int_{s=0}^{\lambda} s\,d\left\{\omega(0;s,\tfrac{\pi}{2})-\omega(0;s,\theta)\right\}$$

(3) ノ右辺ノ第一項ハ負ニナラナイコト明カデアル。ヨツテ左辺ノ負トナラナイコトヲ云フタメニハ次ノ不等式

$$(4)\quad \omega(0;s,\tfrac{\pi}{2})-\omega(0;s,\theta)\geqq 0$$

ガ証明出来レバヨイ。コレハ *anschaulich klar* ト思フダケデ厳密ナ証明ハ出来ナイ。今コレニ関シテニツノ極端ナ場合ヲ考ヘテ見ル。

I) γ_0 ガ単位円周ノ一部ニ重ナル場合.（$\theta=0$, 又ハ π）

II) γ_0 ガ単位円周ニ垂直ナル場合（$\theta=\frac{\pi}{2}$）

I) ノ場合ニハ $\omega(0;S,\theta)=\frac{S}{2\pi}$. II) ノ場合ニハ (nevanlinna; 上掲. 103 頁参照)

$$(5)\quad \omega\left(0;S,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1-Ⓗ}{1+Ⓗ}=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{S}{2-S}$$

$$=\frac{S}{\pi}$$

故ニ明ラカニ

$$\omega\left(0;S,\frac{\pi}{2}\right)>\omega(0;S,0)$$

θ ガ 0 ヨリ $\frac{\pi}{2}$ マデ増加スルトキ $\omega(0;S,\theta)$ モ亦 monoton ニ増加スルト思ハレルが、コレが厳密ニ云ヘレバ (4) が証明出來タコトニナル。G_{γ_0} 内ノ任意ノ一点 ξ ニ於ケル値 $\omega(\xi;S,\theta)$ ハ θ ノ連続函数デアルコトハ明瞭デアルが、ソノ極大値ニ関シテハ何モワカラナイ。更ニ考究ヲ続ケテ他日本誌上ニ正確ナ解答ヲ述ベタイト希ッテキル。

猶 (5) ニヨツテ

$$\Psi_{\frac{\pi}{2}}(0)=2\int_0^{\lambda}S\,d\omega\left(0;S,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\lambda^2}{\pi}$$

今 $\varphi_{\gamma_0}(\xi)=c_1\xi+c_2\xi^2+\cdots\cdots$

ト置ケバ

$$\Psi_{\frac{\pi}{2}}(0)=\log\left|\frac{h_{\gamma_0}(\xi)}{\xi}\right|_{\xi=0}=\log|c_1|,$$

故ニ

$$|c_1|=e^{\frac{\lambda^2}{\pi}}$$

(4) が証明出來タナラバ、云ハレル事柄ハ次ノ通リデアル。

単位円周上ノ一定点ヨリ長サλナル Schlitz γ_0 ヲ入レタ領域ヲ z 平面ノ単位円ニ寫像スル函數ヲ $z=\varphi_{\gamma_0}(\zeta)$ トスレバ

$$\left|\varphi'_{\gamma_0}(0)\right| \leqq e^{\frac{\lambda^2}{\pi}}$$

但シλハ 1 ニ比較シテ極メテ小サイト假定スル。

$\left|\varphi'_{\gamma_0}(0)\right|\left|h'_{\gamma_0}(0)\right|=1$ デアルカラ

$$\left|h'_{\gamma_0}(0)\right| \geqq e^{-\frac{\lambda^2}{\pi}}$$

故ニ最初問題ニシタ $\left|f'_{\gamma}(0)\right|$ ノ最小値ハ $e^{-\frac{\bar{\lambda}^2}{\pi}}\left|g'(0)\right|$ トナル。

$$\left(\lambda=\bar{\lambda}\left|g'(\omega)\right|,\quad g'(\omega)\neq 0\right)$$